Seminarvortrag zur Einführung in grundlegende Begriffe und Zusammenhänge in der Lagrange- und Hamilton-Theorie

Johanna Borissova

Seminar Integrable Systeme und das KAM Theorem
bei J.Prof. Gabriele Benedetti
WS 2018/19 Universität Heidelberg

07.01.19

1. **Vektorfelder - Flüsse - Lie-Klammer**
2. **Wirkungsvariation - Euler-Lagrange-Gleichungen**
3. **Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten**
4. **Hamiltonsche Vektorfelder - Erste Integrale - Poissonklammer**

Definition (Vektorfeld)

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, oder $M = T^n = S^1 \times ... \times S^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der n-Torus). Ein C^k-**Vektorfeld** auf M ist eine C^k-Abbildung

$$X \colon M \to TM, \quad p \mapsto (p, v_p) \quad \text{mit} \quad \pi \circ X = id_M.$$

Dabei ist $\pi \colon TM \to M, \quad (p, v_p) \mapsto p$ die **kanonische Projektion** von TM auf M, d.h. $\forall p \in M \colon \pi(X(p)) = \pi(p, v_p) = p$.

Recall (Tangentialbündel)

Tangentialbündel an M:

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM$$

Ist $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n)$ ein lokales Koordinatensystem um $p \in M$, und

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\colon \ \mathcal{F}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p)),$$

dann bilden die Tangentialvektoren $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine **Basis** von T_pM.

Ein C^k-Vektorfeld X lässt sich dann bzgl. $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n)$ darstellen als **linearer Differentialoperator erster Ordnung** auf Funktionen $f \in \mathcal{F}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$Xf = \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f =: \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \ \in \mathcal{F}(M).$$

$\left(X^1, \ldots, X^n\right) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ C^k-Funktionen, der **Hauptteil** von X bzgl. der Karte $(\mathcal{U}, x)$.

$$\mathcal{X}(M) := \{X \colon M \to TM \text{ Vektorfeld}\} \quad \text{Vektorraum.}$$

Definition (Integralkurve - Vektorfelder als ODEs)

Eine **Integralkurve** des C^k-Vektorfeldes $X \in \mathcal{X}(M)$ durch den Punkt p_0 zur Zeit $t = 0$ ist eine C^k-Kurve $\gamma\colon I \to M$ mit $0 \in I \subset \mathbb{R}$ offen, so, dass der Tangentenvektor $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ \gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$ bzgl. der gewählten Karte $(\mathcal{U}, x) = (\mathcal{U}, x^1, \dots, x^n)$ auf M für alle $t \in I$ dem Vektor $X(\gamma(t))$ entspricht:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}(t) = X^i(\gamma(t)) \qquad i = 1, \dots, n \\ \gamma^i(0) = p_0^i \end{cases}$$

System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit Anfangsbedingung.

Es übertragen sich die bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze:

Eindeutigkeitssatz

Seien $\gamma\colon I \to M,\ \ \gamma'\colon I' \to M$ Integralkurven von $X \in \mathcal{X}(M)$, weiter $\exists\ t_0 \in I \cap I'\colon \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)$, dann:

$$\gamma(t) = \gamma'(t) \quad \forall t \in I \cap I'$$

Existenzsatz

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein C^k-Vektorfeld, dann:
$\forall p \in M\colon\ \exists\ \epsilon > 0$ und eine C^k-Abbildung

$$\sigma\colon (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M, \quad (t, p) \mapsto \sigma(t, p),$$

sodass die Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad t \mapsto \sigma(t, p)$
eine Integralkurve von X durch p zur Zeit $t = 0$ ist:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t, p) = X(\sigma(t, p)) \\ \sigma(t = 0, p) = p \end{cases}$$

Definition (Fluss eines Vektorfeldes)

Für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ C^k-Vektorfeld heißt

$$\sigma_t \colon M \to M, \quad p \mapsto \sigma_t(p) := \sigma(t, p),$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t = X \circ \sigma_t \\ \sigma_0 = id_M \end{cases}$$

der (lokale) **Fluss** von X.

Für $t, s \in \mathbb{R}$ hinreichend klein:

$$\sigma_{s+t} = \sigma_s \circ \sigma_t$$

Insbesondere:

$$\sigma_t \circ \sigma_{-t} = id_M,$$

Daher ist σ_t ein C^k-**Diffeomorphismus** mit Inverser σ_{-t}.

Definition (Pushforward einer Funktion)

Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ glatt und $p \in M$.
Der **Pushforward** von f am Punkt p ist die lineare Abbildung

$$f_\star\colon T_pM \to T_{f(p)}N, \quad v \mapsto f_\star v,$$

$$\forall g \in \mathcal{F}(N),\ \forall x \in M\colon \quad (f_\star v)(g)|_{f(x)} \coloneqq v(g \circ f)|_x\,.$$

Definition (Pullback einer Funktion)

Seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ glatt.
Der **Pullback** von g unter f ist definiert:

$$f^\star g\colon M \to P, \quad p \mapsto (f^\star g)|_p \coloneqq (g \circ f)|_p.$$

Definition (Lieableitung eines Vektorfeldes)

Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ glatte Vektorfelder und σ_t der Fluss von X. Wir suchen nach einem Maß dafür, wie sich Y *entlang des Flusses von* X *ändert*. Für $p \in M$ ist

$$(\mathcal{L}_X Y)_p := \lim_{t \to 0} \frac{(\sigma_{-t})_\star (Y_{\sigma_t(p)}) - Y_p}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left((\sigma_{-t})_\star (Y_{\sigma_t(p)})\right)$$

die **Lieableitung** von Y entlang (des Flusses) von X.

In Koordinatendarstellung:

$$\boxed{\mathcal{L}_X Y = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right] \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \in \ \mathcal{X}(M)}$$

Definition (Lieklammer)

Für zwei glatte Vektorfelder $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\ \in \mathcal{X}(M)$ definiert man die **Lieklammer** bzw. den **Kommutator** von X mit Y:

$$[X, Y] := XY - YX$$

Die Lieklammer ist ein **Differentialoperator erster Ordnung** und es gilt:

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$$

Bemerkung: $(\mathcal{X}(M)\,, + \,, \cdot\,, [\ ,\ ])$ ist eine **Lie-Algebra** (s.u.).

Satz

Sind $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ glatte Vektorfelder und σ_t, τ_s die zugehörigen Flüsse, dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_t \circ \tau_s = \tau_s \circ \sigma_t.$$

Beispiel für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

Mathematisches Pendel

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \sin x = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{x} - \cos x = \text{const} \quad \textbf{(Energieerhaltung)}$$

Konfigurationsraum: $M = S^1 = T^1$
Phasenraum: $S^1 \times \mathbb{R}$

Definition (Lagrangesystem)

Ein **Lagrangesystem** (M, L) ist ein Tupel bestehend aus einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M (**Konfigurationsmannigfaltigkeit**) und einer C^k-Funktion $L\colon TM \to \mathbb{R}$ auf ihrem Tangentialbündel (**Lagrangefunktion**).

Wir betrachten C^k-Kurven $\gamma\colon [t_0, t_1] \to M,\ t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$ auf M, die zwischen **festen Punkten** verlaufen: $\gamma(t_0) = p_0, \gamma(t_1) = p_1$.

$$\mathcal{P}(t_0, t_1, p_0, p_1) \coloneqq \left\{\gamma\colon [t_0, t_1] \to M \quad C^k\text{-Kurve} \mid \gamma(t_0) = p_0, \gamma(t_1) = p_1\right\}$$

Definition (Wirkung)

Das Funktional der **Wirkung** definiert man als

$$S\colon \mathcal{P}(t_0, t_1, p_0, p_1) \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto S[\gamma] \coloneqq \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Satz (Notwendige Bedingung für ein Minimum der Wirkung)

Sei $L \in C^3(TM, \mathbb{R})$ und $q \in \mathcal{P}(t_0, t_1, p_0, p_1)$ eine C^3-Kurve, die S minimiert. Dann erfüllt q die **Euler-Lagrange-Gleichungen**, $\forall t \in [t_0, t_1]$:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)).$$

2. Wirkungsvariation und Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir erhalten damit ein System von **n gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung** in q:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Falls $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(q, \dot{q})\right)$ invertierbar ist, können wir schreiben:

$$\ddot{q} = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial q} =: G(q, \dot{q})$$

und daher:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ G(q, \dot{q}) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Erfüllt eine Kurve $q(t)$ die **E**-**L**-Gleichungen, so **minimiert sie lokal die Wirkung**, wenn gilt:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(q, \dot{q})\right) > 0 \quad \textbf{(Legendre-Bedingung)}$$

D.h. wenn also

$$L_q \colon T_q M \to \mathbb{R}, \quad \dot{q} \mapsto L(q(t), \dot{q}(t)) \quad \textbf{strikt konvex} \text{ ist.}$$

Anwendungsbeispiel für die **E**-**L**-Gleichungen:
Geodätengleichung in der Riemannschen Metrik (folgt)

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$L\colon \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}, \quad (t, q, \dot{q}) \mapsto L(t, q, \dot{q})$$

eine **explizit zeitabhängige Lagrangefunktion** $\in C^k(\mathbb{R} \times TM, \mathbb{R}), k \geq 2$. Weiter sei $q\colon I \to M, \quad t \mapsto q(t)$ eine C^k- Kurve, die die **E-L**-Gleichungen erfüllt. Wir fordern, dass q ein **lokales Minimum** von S ist:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(t, q, \dot{q})\right) > 0 \quad \textbf{(Legendre-Bedingung)}$$

Für $(t, q) = (t, q(t)) \in \mathbb{R} \times M$ **punktweise**:

$$L_{t,q}\colon \ T_q M \to \mathbb{R}, \quad \dot{q} \mapsto L_{t,q}(\dot{q}) := L(t, q, \dot{q})$$

3. Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten

Die **Legendretransformation** von $L_{t,q}$ ist dann gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{L_{t,q}} \colon T_qM \to T_q^\star M, \quad \dot{q} \mapsto \mathcal{L}_{L_{t,q}}(\dot{q}) := \frac{\partial L_{t,q}}{\partial \dot{q}} := \frac{\partial L(t,q,\cdot)}{\partial \dot{q}} =: p(\cdot)$$

$$\in \; C^{k-1}(T_qM, T_q^\star M).$$

Recall (Tangentialbündel)

Kotangentialraum von M bei q:

$$T_q^\star M := \{l \colon T_qM \to \mathbb{R} \;\mid l \text{ Linearform}\} = (T_qM)^\star$$

Kotangentialbündel an M:

$$T^\star M := \bigcup_{q \in M} T_q^\star M = \bigcup_{q \in M} \{q\} \times T_q^\star M$$

3. Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten

$$p_i(t, q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t, q, \dot{q}) \quad \textbf{(der zu } q^i \textbf{ kanonisch konjugierte Impuls)}$$

Fordern wir zusätzlich **Surjektivität** für $\mathcal{L}_{L_{t,q}}$, dann garantiert das IFT die Inverse $\dot{q} = \dot{q}(t, q, p)$.
Analog $\forall (t, q(t)) \in \mathbb{R} \times M$, - wir erhalten so die **Transformation**:

$$\mathbb{L}\colon \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R} \times T^\star M, \quad (t, q, \dot{q}) \mapsto \left(t, q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \cdot)\right) =: (t, q, p).$$

Mit $\dot{q} = \dot{q}(t, q, p)$ ist die **Legendretransformierte** von L dann:

$$H\colon \mathbb{R} \times T^\star M \to \mathbb{R}, \quad (t, q, p) \mapsto H(t, q, p) := \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - L(t, q, \dot{q})$$

3. Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten

H: **Hamiltonfunktion**. Wir sehen:

$$L \in C^k(\mathbb{R} \times TM, \mathbb{R}) \iff H \in C^k(\mathbb{R} \times T^\star M, \mathbb{R}).$$

Der Definitionsbereich $\mathbb{R} \times T^\star M$ verallgemeinert das Konzept des (2n+1)-dimensionalen **erweiterten Phasenraums**.

Damit transformiert das System der n Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Ordnung auf ein **System von 2n Differentialgleichungen erster Ordnung**:

Hamiltonsche Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n$$

Anwendungsbeispiel für die **E-L***-Gleichungen und zugehörige Hamiltonfunktion:*

Geodäten in der Riemannschen Metrik

Auf einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M wählen wir lokale Koordinaten und betrachten für $q \in M$ die Tangentialvektoren $u = (u^1, \ldots, u^n), v = (v^1, \ldots, v^n) \in T_q M$. Das **Innere Produkt** von u und v bzgl. der Metrik $g(q)$ ist

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q) u^i v^j = g_{ij}(q) u^i v^j$$

und die **Länge** des Tangentenvektors u ist gegeben durch

$$||u||_{g(q)} := \left(\langle u, u \rangle_{g(q)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(g_{ij}(q) u^i u^j \right)^{\frac{1}{2}} .$$

3. Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten

Dabei ist $g = g(q)$ eine **reelle, positiv definite, symmetrische Matrix**. Die **Inverse** notiert man mit $g^{ij} := g_{ij}^{-1}$, d.h.

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Definition (Länge einer Kurve)

Sei $q\colon [t_0, t_1] \to M$ eine glatte Kurve. Die **Länge** von q ist

$$l(q) := \int_{t_0}^{t_1} ||\dot{q}(t)||_{g(q(t))} \, \mathrm{d}t$$

Eine Kurve, die l unter allen Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt minimiert, heißt **Geodäte**.

3. Legendre-Transformation - Hamiltonsche Gleichungen - Riemannsche Geodäten

Beobachtung:

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} ||\dot{q}(t)||_{g(q(t))} \, \mathrm{d}t \quad \text{ist minimal} \quad \Longleftrightarrow$$

$$E(q) := \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} ||\dot{q}(t)||^2_{g(q(t))} \, \mathrm{d}t \quad \text{ist minimal.}$$

Die **E**-**L**-Gleichungen mit der **Langrangefunktion**

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} ||\dot{q}(t)||^2_{g(q(t))} = \frac{1}{2} g_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k$$

liefern die

Geodätengleichung für die Riemannsche Metrik

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{q}^k \dot{q}^j = 0.$$

Die zugehörige **Hamiltonfunktion** ist

$$H(q, p) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j.$$

Beobachtung: Ist $L\colon TM \to \mathbb{R}$ nicht explizit zeitabhängig, dann ist es $H\colon T^\star M \to \mathbb{R}$ ebenfalls nicht. Mit

$$x := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \nabla H := \left(\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q^n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^T$$

lauten die **Hamiltonschen Gleichungen**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \\ \dot{p}^1 \\ \vdots \\ \dot{p}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p^n} \\ -\frac{\partial H}{\partial q^1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q^n} \end{pmatrix} = J\nabla H, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = J\nabla H}\,.$$

Weiter:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = J\nabla H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) =: X_H$$

Wir können also zu jedem Hamiltonsystem einer Funktion H ein

Hamiltonsches Vektorfeld

$$X_H := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

assoziieren.

Insbesondere:
L C^2-Funktion $\Leftrightarrow$ H C^2-Funktion $\Rightarrow$ Fluss von X_H existiert.

Definition (Lieableitung einer Funktion)

Sei $f \in \mathcal{F}(M)$ eine glatte Funktion und $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld mit Fluss σ_t. Analog zur Lieableitung eines Vektorfeldes definiert man die **Lieableitung** von f entlang (des Flusses) von X:

$$\mathcal{L}_X f := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \sigma_t)$$

Da σ_t der Fluss von X ist, erfüllt er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t = X \circ \sigma_t\,;\ \sigma_0 = id_M$ und es gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}_X f = Xf \ \in \mathcal{F}(M)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\mathcal{L}_X = X \ \in \mathcal{X}(M)}\,.$$

Definition (Erstes Integral)

Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ heißt **Erstes Integral** des Vektorfeldes $X \in \mathcal{X}(M)$ bzw. der zugehörigen Differentialgleichung, wenn f *entlang des Flusses von* X *konstant* ist:

$$\forall p \in M\colon \quad (\mathcal{L}_X f)_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\sigma_t(p)) = X_p f = 0$$

(Wir betrachten ab jetzt nur noch das *2n-dimensionale* Kotangentialbündel als Mannigfaltigkeit.)

Beispiel: Die Hamiltonfunktion $H \in \mathcal{F}(M)$ ist ein erstes Integral des Hamiltonschen Vektorfeldes X_H.

Definition (Poissonklammer zweier Funktionen)

Seien $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Wir wählen lokale Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ auf M und definieren die **Poissonklammer** von f mit g:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad \in \mathcal{F}(M).$$

Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$

Mit dem zu f gehörigen Hamiltonschen Vektorfeld

$$X_f := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad \longrightarrow \quad \{f, g\} = X_f g.$$

Daher:

$$X_f g = \{f, g\} = -\{g, f\} = -X_g f.$$

Ergebnis:

$$g \text{ ist } \textit{erstes Integral} \text{ von } X_f \iff$$
$$0 = \mathcal{L}_{X_f} g = X_f g = \{f, g\} \iff$$
$$\{f, g\} = \{g, f\}.$$

Bemerkung: Mit der Poisson-Klammer $\{\cdot,\cdot\}\colon \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ wird $(\mathcal{F}(M), +, \cdot, \{\cdot,\cdot\})$ zu einer **Poisson-Algebra**, d.h.:

- $(\mathcal{F}(M), +, \cdot, \{\cdot,\cdot\})$ ist eine **Lie-Algebra**:
  - $\{\cdot,\cdot\}$ ist **bilinear**
  - $\{\cdot,\cdot\}$ ist **antisymmetrisch**: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
  - **Jacobi-Identität**: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$
- $\{\cdot,\cdot\}$ ist eine **Derivation**, d.h. es gilt die **Leibnizregel**: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$

Satz von Poisson

Seien $f, g, H \in \mathcal{F}(M)$ und f, g erste Integrale des hamiltonschen Vektorfeldes X_H, dann ist $\{f, g\}$ **ebenfalls erstes Integral** von X_H.

Weiter lässt sich zeigen:

Sind $f, g \in \mathcal{F}(M)$ und X_f, X_g die zugehörigen hamiltonschen Vektorfelder, dann ist $[X_f, X_g]$ ein **ebenfalls Hamiltonsches Vektorfeld** zur Hamiltonfunktion $\{f, g\}$:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

Poissonklammern der Koordinatenfunktionen

Seien $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)\colon U \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ lokale Koordinaten auf M ($U \subset M$; $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen). Wegen

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta^i_j = \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{\partial q^i}{\partial p_j} = 0 = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}$$

erhalten wir:

$$\left\{q^i, q^j\right\} = 0 = \{p_i, p_j\} \quad ; \quad \left\{q^i, p_j\right\} = -\delta^i_j.$$

- Arnold VI. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York; Heidelberg [u.a.]: Springer; 1978.
- Moser J, Zehnder E. *Notes on Dynamical Systems*. Providence, RI: American Mathematical Soc.; 2005.
- Silva AC. *Lectures on Symplectic Geometry*. 2nd ed. Berlin; Heidelberg [u.a.]: Springer; 2008.